Matematický KLOKAN 2009

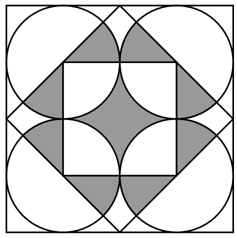
www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. V akváriu plave 200 rybiček, 1 % z nich je modrých, zbývající jsou žluté. Kolik žlutých rybiček musíme z akvária vylovit, aby v něm byla právě 2 % modrých?

(A) 2 (B) 4 (C) 20 (D) 50 (E) 100



2. Největší čtverec na obrázku má obsah 4. Určete obsah jeho vybarvené části.

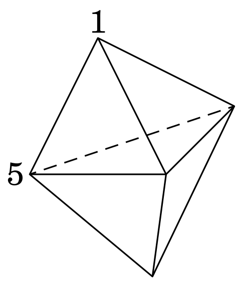
(A) 1 (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi + 2}{4}$ (D) π (E) $\frac{4}{3}$

3. Pro kolik různých přirozených čísel n je $(n^2 + n)$ prvočíslo?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) pro více než 2, konečně mnoho
(E) pro nekonečně mnoho

4. Jarda pozval v Paříži Evu a Martinu do kavárny. Každý z nich si objednal tři sklenice džusu, dvě zmrzliny a pět koláčků. Kterou z následujících částek mohli dohromady zaplatit?

(A) 39,20 (B) 38,20 (C) 37,20 (D) 36,20 (E) 35,20



5. Stěny tělesa na obrázku jsou tvořeny šesti trojúhelníky. Každému vrcholu je přiřazeno nějaké číslo. Na každou stěnu jsme napsali součet tří čísel u jejích vrcholů a zjistili jsme, že všechna tato čísla jsou stejná. Určete součet čísel u všech pěti vrcholů, jsou-li dvě z přiřazených čísel rovny 1 a 5 (viz obrázek).

(A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24

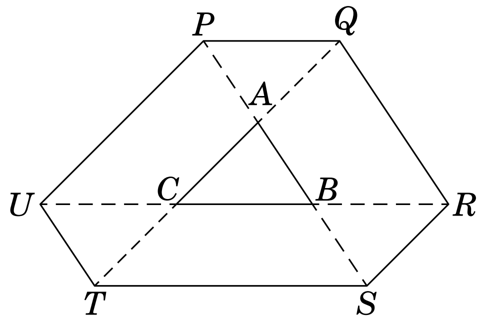
6. Ve frontě stojí 25 obyvatel ostrova, kde každý buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lže. Všichni v této frontě kromě prvního prohlásili, že přímo před nimi stojí lhář. První člověk tvrdí, že všichni za ním stojící jsou lháři. Kolik lhářů je ve frontě?

(A) 0
(B) 12
(C) 13
(D) 24
(E) není možné jednoznačně určit

7. Kružnice $k(F;13)$ a $l(G;15)$ se protínají v bodech P a Q, délka úsečky PQ je 24. Které z následujících čísel může udávat délku úsečky FG.

(A) 2 (B) 4 (C) 5
(D) 9 (E) žádné z předcházejících

8. Strany trojúhelníku ABC s obsahem 1 jsou prodlouženy do bodů P, Q, R, S, T a U tak, že platí $|PA| = |AB| = |BS|$, $|TC| = |CA| = |AQ|$ a $|UC| = |CB| = |BR|$ (viz obr.). Určete obsah šestiúhelníku $PQRSTU$.



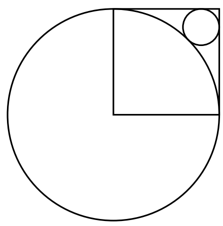
(A) 9 (B) 10
(C) 12 (D) 13
(E) nelze jednoznačně určit

Úlohy za 4 body

9. Líza má v krabici 2 bílé, 3 červené a 4 modré ponožky. Ví, že třetina z nich je děravá, ale neví, které ponožky to jsou. Líza bude v náhodném pořadí ponožky vytahovat z krabice. Určete nejmenší počet ponožek, které musí Líza z krabice vytáhnout, aby si mohla být jista, že je mezi nimi stejnobarevný neděravý pár.

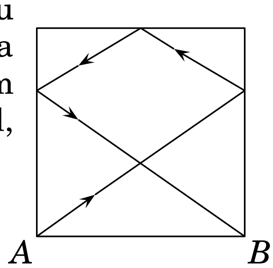
(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

10. Čtverec na obrázku má stranu délky 1 a jeho vrchol je ve středu větší z kružnic. Dvě jeho strany jsou tečnami obou kružnic. Najděte poloměr menší z dotýkajících se kružnic.



(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $(1-\sqrt{2})^2$

11. Na čtvercovém kulečníkovém stole se stranou délky 2 m se z rohu A kutálela koule. Po dotyku se všemi třemi stranami se zastavila v rohu B (viz obr.). Kolik metrů koule po stole urazila? (Přitom úhel, pod kterým se koule od strany odrazila byl stejný jako úhel, pod kterým na stranu narazila.)

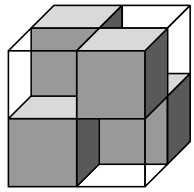


(A) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) 7
(D) 8 (E) $2\sqrt{13}$

12. 2009 klokanů, každý z nich buď světlý, nebo tmavý, srovnávalo své výšky. Zjistili, že právě jeden světlý klokan byl vyšší než právě 8 tmavých, právě jeden světlý byl vyšší než právě 9 tmavých, právě jeden světlý klokan byl vyšší než právě 10 tmavých atd., až nakonec právě jeden světlý klokan byl vyšší než všichni tmaví. Kolik bylo světlých klokanů?

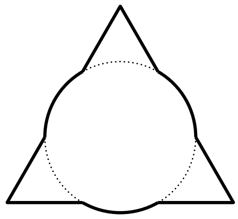
(A) 1000 (B) 1001 (C) 1002
(D) 1003 (E) tato situace nemohla nastat

13. Krychle o hraně 2 na obrázku byla sestavena ze čtyř průhledných jednotkových krychlí a čtyř tmavých neprůhledných jednotkových krychlí. Tyto krychle jsou rozmístěny tak, že výsledná krychle je neprůhledná, tj. nemůžeme přes krychli vidět seshora dolů, ani zepředu dozadu, ani zleva doprava. Ze stejných jednotkových krychlí chceme sestavit neprůhlednou krychli o hraně 3. Kolik tmavých krychlí si musíme připravit, určete jejich nejmenší počet?



(A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 18

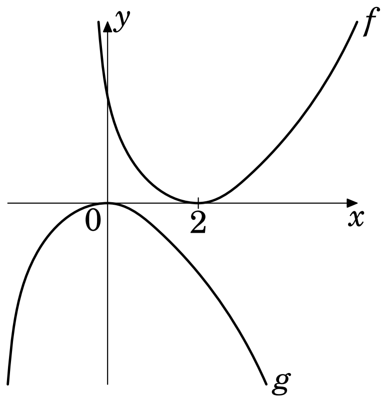
14. Do těžiště rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 3 jsme umístili střed kruhu s poloměrem 1. Určete obvod výsledného obrazce.



(A) $6+\pi$ (B) $3+2\pi$ (C) $9+\pi$ (D) $9+\dfrac{\pi}{3}$ (E) 3π

15. Na obrázku jsou grafy funkcí f a g. Který z následujících vztahů mezi f a g platí pro argumenty z definičního oboru?

(A) $g(x-2) = -f(x)$ (B) $g(x) = f(x+2)$
(C) $g(x) = -f(-x+2)$ (D) $g(-x) = -f(-x+2)$
(E) $g(2-x) = -f(x)$



16. Každé dvě sousední číslice desetimístného čísla zapsaného číslicemi 1, 2 a 3 se liší o jedna. Kolik takových čísel existuje?

(A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 80 (E) 100

Úlohy za 5 bodů

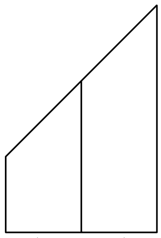
17. Každý ze sta účastníků matematické olympiády řešil čtyři příklady. První problém vyřešilo 90 soutěžících, druhý 85, třetí 80 a čtvrtý 70 soutěžících. Z počtů účastníků, kteří mohli vyřešit všechny čtyři příklady, vyberte ten nejmenší.

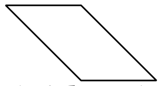
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

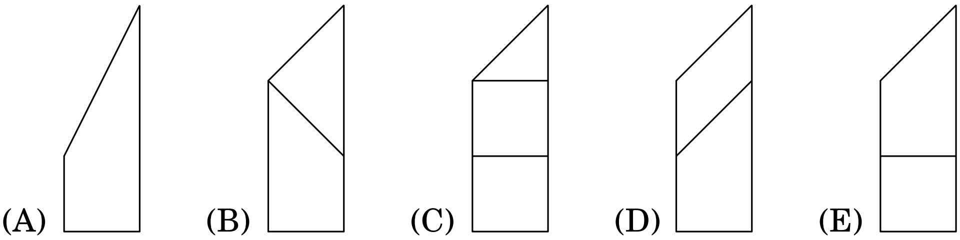
18. Najděte číslici na místě jednotek čísla $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Na obrázku vpravo vidíme nárys a půdorys daného tělesa. Který z obrázků může být jeho bokorysem?


(nárys)


(půdorys)



20. Běžci A a B běží po uzavřené dráze na stadionu konstantní rychlostí. Bežec A běží rychleji než B a jedno kolo uběhne za 3 minuty. Vyběhli ze stejného místa a po 8 minutách A poprvé doběhnul B. Za jaký čas uběhne B jedno kolo?

(A) 6 min (B) 8 min (C) 4 min 30 s (D) 4 min 48 s (E) 4 min 20 s

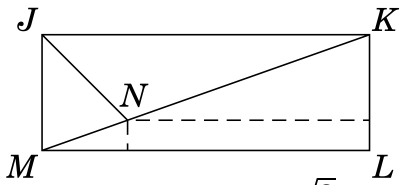
21. Počet všech osmimístných čísel zapsaných osmi navzájem různými nenulovými číslicemi označme N. Kolik z nich je dělitelných devíti?

(A) $\frac{N}{9}$ (B) $\frac{N}{8}$ (C) $\frac{N}{3}$ (D) $\frac{7N}{8}$ (E) $\frac{8N}{9}$

22. Pro kolik přirozených čísel $n \geqq 3$ existuje konvexní n-úhelník, jehož velikosti úhlů jsou v poměru $1 : 2 : 3 : \ldots : n$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) více než 5

23. Osa úhlu KJM protíná úhlopříčku KM pravoúhelníku $JKLM$ v bodě N. Vzdálenosti bodu N od stran LM a KL jsou po řadě 1 a 8. Najděte délku strany LM.



(A) $8 + 2\sqrt{2}$ (B) $11 - \sqrt{2}$ (C) 10 (D) $8 + 3\sqrt{2}$ (E) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

24. Čísla $1, 2, 3, \ldots, 99$ jsou rozdělena do n množin tak, že:

- každé číslo je právě v jedné množině;
- v každé množině jsou alespoň dvě čísla;
- jestliže jsou dvě čísla ve stejné množině, potom jejich součet není dělitelný 3.

Najděte nejmenší číslo n s touto vlastností.

(A) 3 (B) 9 (C) 33 (D) 34 (E) 66